第 3 节 求带参函数的单调区间、极值、最值（★★★）

强化训练

1．（2022•四川模拟•★★）设 $f(x)=a\ln x-x+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解： 由题意，$f'(x)=\dfrac{a}{x}-1=\dfrac{a-x}{x}(x>0)$，

（$f'(x)=0\Rightarrow x=a$，但 a 是否在定义域内，与 a 的正负有关，故据此讨论）

①当 $a\le 0$ 时，（如图 1，在 $(0,+\infty)$ 上，$a-x<0$）

$a-x\le -x<0$，所以 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

②当 $a>0$ 时，（如图 2，$a-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上先正后负）

$f'(x)>0\Leftrightarrow a-x>0\Leftrightarrow 0<x<a$，$f'(x)<0\Leftrightarrow a-x<0\Leftrightarrow x>a$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.

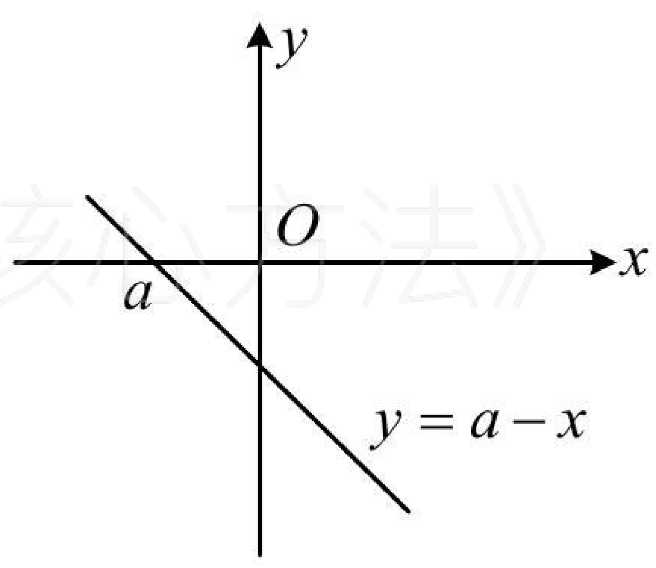


图1

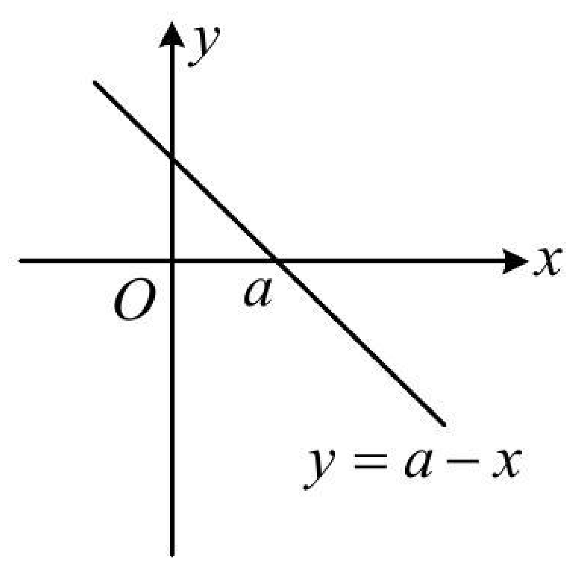


图2

2．（★★）设 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+(2-a)e^{x}-2ax-1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

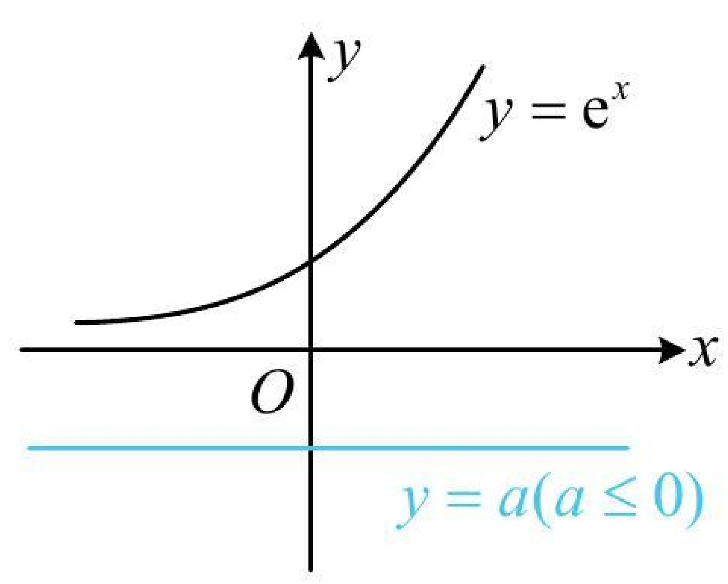
解： $f'(x)=e^{2x}+(2-a)e^{x}-2a=(e^{x}+2)(e^{x}-a)$，

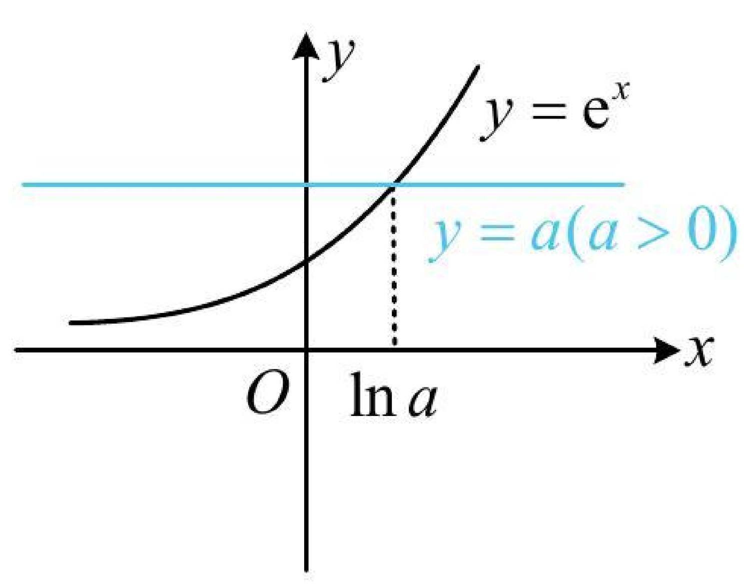
（$f'(x)$的符号与$e^{x}-a$这个因式的符号相同，该因式是否有零点由 a 的正负决定，如图，故据此讨论）

①当 $a\le 0$ 时，$e^{x}-a>0$，$e^{x}+2>0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln a$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln a$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.





3．（2023•全国模拟•★★★）已知 e 为自然对数的底数，a 为常数，函数 $f(x)=e^{ax}-2x$，求 $f(x)$ 的极

值.

解：由题意，$f'(x)=a\mathrm{e}^{ax}-2$，$x\in\mathbf{R}$，

（令 $f'(x)=0$ 可得 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{2}{a}$，这个零点要存在，必须满足 $a>0$，否则没有意义，故据此讨论）

①当 $a\le 0$ 时，$a\mathrm{e}^{ax}\le 0$，所以 $f'(x)=a\mathrm{e}^{ax}-2<0$，从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，故 $f(x)$ 无极值；

②当 $a>0$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow a\mathrm{e}^{ax}-2>0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{ax}>\frac{2}{a}\Leftrightarrow ax>\ln\frac{2}{a}\Leftrightarrow x>\frac{1}{a}\ln\frac{2}{a}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<\frac{1}{a}\ln\frac{2}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{2}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a}\ln\frac{2}{a},+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)$ 有极小值 $f(\frac{1}{a}\ln\frac{2}{a})=\mathrm{e}^{a\cdot\frac{1}{a}\ln\frac{2}{a}}-2\cdot\frac{1}{a}\ln\frac{2}{a}=\mathrm{e}^{\ln\frac{2}{a}}-\frac{2}{a}\ln\frac{2}{a}=\frac{2}{a}-\frac{2}{a}\ln\frac{2}{a}$，无极大值.

4．（★★★）已知函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{a-2}{2}x^2-ax+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：由题意，$f'(x)=2x^2+(a-2)x-a=(2x+a)(x-1)$，（两根 $-\frac{a}{2}$ 和 1 的大小不定，故讨论两根的大小）

①当 $a<-2$ 时，$-\frac{a}{2}>1$，如图 1，$f'(x)>0\Leftrightarrow x<1$ 或 $x>-\frac{a}{2}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 1<x<-\frac{a}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,-\frac{a}{2})$ 上单调递减，在 $(-\frac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a=-2$ 时，$f'(x)=2(x-1)^2\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

③当 $a>-2$ 时，$-\frac{a}{2}<1$，如图 2，$f'(x)>0\Leftrightarrow x<-\frac{a}{2}$ 或 $x>1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow -\frac{a}{2}<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{a}{2})$ 上单调递增，在 $(-\frac{a}{2},1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

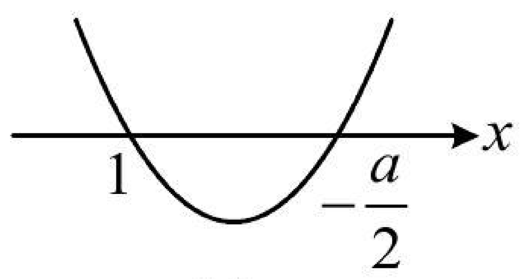


图1

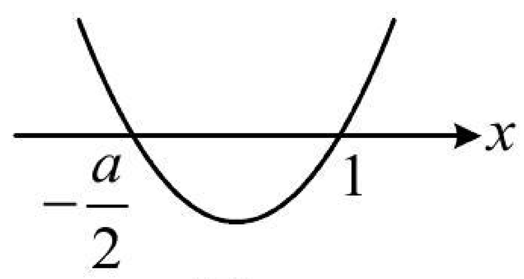


图2

5．（2023·甘肃模拟·★★★）已知函数 $f(x)=[x^2-(a+3)x+2a+3]\mathrm{e}^x$，其中 $a\in\mathbf{R}$，讨论函数 $f(x)$ 的极值.

解：由题意，$f'(x)=(2x-a-3)\mathrm{e}^x+[x^2-(a+3)x+2a+3]\mathrm{e}^x=[x^2-(a+1)x+a]\mathrm{e}^x=(x-a)(x-1)\mathrm{e}^x$，

（两根分别为 a 和 1，大小不确定，故讨论它们的大小）

①当 $a<1$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow(x-a)(x-1)>0\Leftrightarrow x<a$ 或 $x>1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow a<x<1$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，在 $(a,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)$ 有极大值 $f(a)=(3-a)\mathrm{e}^a$，极小值 $f(1)=(a+1)\mathrm{e}$；

②当 $a=1$ 时，$f'(x)=(x-1)^2\mathrm{e}^x\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 $f(x)$ 无极值；

③当 $a>1$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow(x-a)(x-1)>0\Leftrightarrow x<1$ 或 $x>a$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 1<x<a$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)$ 有极大值 $f(1)=(a+1)\mathrm{e}$，极小值 $f(a)=(3-a)\mathrm{e}^{a}$.

6.（2023・北京海淀模拟・★★★）已知函数 $f(x)=a\ln x+x^{2}-(2a+1)x$，其中 $a>0$，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：由题意，$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2x-(2a+1)=\dfrac{2x^{2}-(2a+1)x+a}{x}=\dfrac{(2x-1)(x-a)}{x}$，$x>0$，

（$f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ 或 a，a 可能在或不在定义域内，需讨论，不妨先看 a 不在定义域内的情形）

①当 $a\le 0$ 时，$x-a>0$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow 2x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{2}$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增；

（再看 a 在定义域内的情形，此时两根 a 与 $\dfrac{1}{2}$ 的大小不确定，故又据此讨论）

②当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<a$ 或 $x>\dfrac{1}{2}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow a<x<\dfrac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,\dfrac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\dfrac{(2x-1)^{2}}{2x}\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

④当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{2}$ 或 $x>a$，$f'(x)<0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x<a$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{2},a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

7.（★★★★）已知函数 $f(x)=(x-3)\mathrm{e}^{x}-ax^{2}+4ax+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：$f'(x)=(x-2)\mathrm{e}^{x}-2ax+4a=(x-2)(\mathrm{e}^{x}-2a)$，

（接下来对 a 讨论，先按 $\mathrm{e}^{x}-2a$ 有无零点，分 $a\le 0$ 和 $a>0$ 两类考虑）

①当 $a\le 0$ 时，$\mathrm{e}^{x}-2a>0$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>2$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<2$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增；

（当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 有零点 2 和 $\ln(2a)$，故再讨论 2 与 $\ln(2a)$ 的大小，即讨论 a 与 $\dfrac{\mathrm{e}^{2}}{2}$ 的大小）

②当 $0<a<\dfrac{\mathrm{e}^{2}}{2}$ 时，$\ln(2a)<2$，（2 和 $\ln(2a)$ 将实数集划分成了三段，故分三段分别判断 $f'(x)$ 的正负）

若 $x<\ln(2a)$，则 $x-2<0$，$\mathrm{e}^{x}-2a<\mathrm{e}^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)>0$，

若 $\ln(2a)<x<2$，则 $x-2<0$，$\mathrm{e}^{x}-2a>\mathrm{e}^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)<0$，

若 $x>2$，则 $x-2>0$，$\mathrm{e}^{x}-2a>\mathrm{e}^{2}-2a>0$，所以 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2a))$ 上单调递增，在 $(\ln(2a),2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a=\frac{e^2}{2}$ 时，$f'(x)=(x-2)(e^x-e^2)$，若 $x<2$，则 $x-2<0$，$e^x-e^2<0$，所以 $f'(x)>0$，

若 $x>2$，则 $x-2>0$，$e^x-e^2>0$，所以 $f'(x)>0$，结合 $f'(2)=0$ 知 $f'(x)\geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

④当 $a>\frac{e^2}{2}$ 时，$\ln(2a)>2$，若 $x<2$，则 $x-2<0$，$e^x-2a<e^2-2a<0$，所以 $f'(x)>0$，

若 $2<x<\ln(2a)$，则 $x-2>0$，$e^x-2a<e^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)<0$，

若 $x>\ln(2a)$，则 $x-2>0$，$e^x-2a>e^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增.